

بهینه‌سازی، تمرین یک

فصل زمستان سال یک‌هزار و سیصد و نود و نه،

دانشکده علم رایانه و فناوری اطلاعات، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

0- گرادیان و ماتریس هسی توابع زیر را محاسبه کنید

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 - 10x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1x_3 + 8x_3^2 + 3x_1 - x_2 + 8x_3$$

ب- ویژگی ماتریس هسی تابع درجه دو چیست؟

ج- توابع را با نمایش‌های به صورت $f(x) = x^T Q x - b^T x$ و همین‌طور $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ بازنویسی کنید. به نظر شما چرا این بازنویسی‌ها و صورت‌های نمایش به کار می‌رود؟

د- تابع درجه دو $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x - c$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c=0$. کمینه‌ساز (x^*) و همچنین مقدار تحلیلی کمینه f را بر اساس Q و b بدست آورید. مختصری مقدار بدست آمده را تحلیل کنید.

۱- تاکنون توابعی را مطالعه کردیم که به صورت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ هستند. به دیگر دارای یک خروجی هستند. مشتق اول این نوع توابع (گرادیان) برداری با اندازه $n \times 1$ هستند. ولی توابع می‌توانند دارای چند خروجی باشند که به صورت تعریف $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ می‌شوند. مشتق اول توابع با چند-خروجی را نمی‌توان در قالب بردار گرادیان نمایش داد. مشتق اول توابع چند خروجی در ماتریسی $n \times m$ با نام

ماتریس ژاکوبی J نمایش داده می‌شود، به طوری که $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

مشتق مرتبه اول تابع زیر را حساب کنید و در قالب ماتریس ژاکوبی نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$$

۲- قضیه کوژ را اثبات کنید.

۳- الف) سطح ترازهای تابع $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$ را رسم کنید و مقدار کمینه \mathbf{x}^* را استنتاج کنید. ب) با شروع از نقطه اولیه $\mathbf{x}_0 = [0,0]^T$ همگرا شدن با تعداد متناهی قدم را با روش تندترین نزول تحقیق کنید. آیا مقدار اولیه دیگری می‌توان یافت که در تعداد متناهی از قدم‌ها همگرا شود؟ ج) روش نیوتن را امتحان کنید و نتیجه را هم به صورت گرافیکی (سطح ترازها) گزارش کنید و تفسیر کنید.

۴- تابع $f(\mathbf{x}) = -\cos(x_1)\cos(x_2)e^{[-(x_1-\pi)^2-(x_2-\pi)^2]}$ را در نظر بگیرید. نقطه کمینه سراسری در (π, π) است.

الف) با شروع از $\mathbf{x}_0 = [0.75, -1.25]^T$ از روش نیوتن برای حل مسئله استفاده کنید.

ب) با شروع از $\mathbf{x}_0 = [0,0]^T$ از روش نیوتن برای حل مسئله استفاده کنید.

ج) با شروع از $\mathbf{x}_0 = [0,0]^T$ از ترکیب روش نیوتن و تندترین شیب مسئله را حل کنید. الگوریتم را بدین نحو پیاده کنید که ابتدا جستجو را با روش نیوتن شروع کند؛ هر جا که روش نیوتن به خطا برخورد، از روش تندترین شیب استفاده کند. در هر قدم از سیاست مزبور استفاده کنید.

د) با شروع از $\mathbf{x}_0 = [0,0]^T$ از روش نیوتن تغییر یافته برای حل مسئله استفاده کنید $[(H_i + \nu I)p_i = -g_i]$.

کپی برداری - نمره منفی و از دست دادن کل نمره

ذکر منابع به شیوه ارجاع در متن

کدها توضیح‌دار باشند. همچنین، به همراه مستندی که کد توابع و الگوریتم را نشان دهد.

مهلت تا آخر روز سی بهمن

ا-نام behnesazi.iasbs@gmail.com

عنوان: «بهینه‌سازی - تمرین یک»

فایل متنی: قالب پی‌دی‌اف

نام فایل: B-T1-NamKhanevadeghi_Nam.pdf